3.7.7 Dělení mnohočlenem I

Předpoklady: 030706

Př. 1: Vypočti. a) $\left(4a^3-6a^2+12a\right):2a$ b) $\left(3x^3-2x^2+6\right):3x^2$

a) $\left(4a^3-6a^2+12a\right):2a=\frac{4a^3}{2a}-\frac{6a^2}{2a}+\frac{12a}{2a}=2a^2-3a+6$

b) $\left(3x^3-2x^2+6\right):3x^2=\frac{3x^3}{3x^2}-\frac{2x^2}{3x^2}+\frac{6}{3x^2}=x-\frac{2}{3}+\frac{2}{x^2}$

V minulé hodině jsme dělili mnohočlen jednočlenem. Jak budeme postupovat, když budeme dělit mnohočlenem? Například $\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)$?

Pedagogická poznámka: S následujícím nápadem nepřicházím já, ale žáci. Je to většinou první nápad, který se objeví, když se zeptám co s tím.

První nápad:
$\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=\frac{a^3+5a^2+9a+9}{a+3}=\frac{a^3+5a^2+9a+9}{a}+\frac{a^3+5a^2+9a+9}{3}$: rozdělili bychom si zlomek tak, aby v každém jmenovateli byl pouze jednočlen. Je to rozumné?
Představíme si to na normálním zlomku: $\frac{7}{13}=\frac{7}{10}+\frac{7}{3}$ $\Rightarrow$ evidentní nesmysl, levá strana je menší než 1, pravá je větší, nemůžeme rozdělit číslo ve jmenovateli, udává velikost kousků a při jeho rozdělení bychom získali větší kousky (a tím pádem jinou hodnotu).

Př. 2: Navrhni způsoby, kterými bychom mohli odvodit postup pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.

- Inspirace normálním dělením pod sebe.
- Počítání příkladu, u kterého známe výsledek (dělenec si vypočteme jako součin dvou mnohočlenů).

Př. 3: Vypočti součin $\left(a+3\right)\cdot\left(a^2+2a+3\right)$ vytvoř podle něj zkušební příklad na dělení.

$\left(a+3\right)\cdot\left(a^2+2a+3\right)=a^3+2a^2+3a+3a^2+6a+9=a^3+5a^2+9a+9$
$\Rightarrow$ zkusíme dělení $\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=a^2+2a+3$ (budeme znát výsledek a proto se nám bude jednodušeji počítat.

Pedagogická poznámka: Následující rozbor promítám, žáci si ho nepíší. Předem upozorňuji, že jeho pochopení není nutnou podmínkou pro pochopení samotného algoritmu dělení mnohočlenů, že jde spíš o povídání, které vzniklo kvůli těm nejpřemýšlivějším. Ti se se samotným postupem dělení mnohočlenu často špatně

smiřují, protože není příliš dobře vidět, jak uvnitř funguje.
Rozbor samotný vznikl kvůli tomu, že v prvním průchodu učebnicí žáci odmítli algoritmus na dělení s tím, že "dělení nejvyšší mocniny nejvyšší mocninou" je přece to samé, co jsme zamítli v úvodu hodiny - rozdělení jmenovatele. Zjistil jsem, že z jejich pohledu měli pravdu a přidal před uvedení algoritmu vysvětlování, které většině třídy moc nepomůže, ale těm nejdůslednějším situaci trochu osvětlí (musím přiznat, že i já sám mám pocit, že tomu teď rozumím lépe).

Zkusíme si příklad na násobení obrátit:

- $a^3+5a^2+9a+9=a^3+2a^2+3a+3a^2+6a+9=(a+3)\cdot(a^2-a+3)$:
  - červené členy vznikly násobením mnohočlenu a^2+2a+3 (výsledek dělení) a jednočlenu a,
  - modré členy vznikly násobením mnohočlenu a^2+2a+3 (výsledek dělení) a jednočlenu 3.

stačilo by červené členy a^3+2a^2+3a vydělit jednočlenem a a získali bychom výsledek (a^2+2a+3), který bychom pak potvrdili vydělením modrých členů $3a^2+6a+9$ jednočlenem 3.

- podobně můžeme najít odpovídající členy k násobení každého členu z výsledku dvojčlenem $(a+3)$:
  - $a^3+5a^2+9a+9=a^3+2a^2+3a+3a^2+6a+9=(a+3)\cdot(a^2+2a+3)$,
  - $a^3+5a^2+9a+9=a^3+2a^2+3a+3a^2+6a+9=(a+3)\cdot(a^2+2a+3)$,
  - $a^3+5a^2+9a+9=a^3+2a^2+3a+3a^2+6a+9=(a+3)\cdot(a^2+2a+3)$.

Kdybychom měli dělenec místo normálního tvaru a^3+5a^2+9a+9 ve tvaru rozloženém $a^3+2a^2+3a+3a^2+6a+9$, nebyl by příklad $(a^3+5a^2+9a+9):(a+3)$ tak těžký.
Které členy v normálním tvaru nevznikly sčítáním (a je z nich tedy něco "vidět"?
Pouze:

- první člen a^3 s nejvyšší mocninou - je určen pouze členy s nejvyšší mocninou neznámé mnohočlenů $(a+3)$ a (a^2+2a+3),
- poslední člen 9 - je určen pouze členy s nejnižší (nultou) mocninou neznámé mnohočlenů $(a+3)$ a (a^2+2a+3).

Můžeme tedy první člen výsledku a^2 najít jako podíl $a^3:a$, ale musíme před dalším dělením zohlednit, že v mnohočlenu a^3+5a^2+9a+9 je obsažen (skrytě kvůli sčítání) i člen $3a^2=a^2\cdot 3$ (tím začíná modrá část, která se vede k výsledku při dělením jednočlenem 3).
Skvělá zpráva: pokud člen $3a^2$ odečteme od členu $5a^2$ získáme člen $2a^2$ - tedy druhý člen v červené části, která po dělení jednočlenem a veden na výsledek dělení.
Shrnutí: můžeme dělit jen členem a z dvoučlenu $a+3$, když budeme výsledky dělení používat k tomu, abych z děleného mnohočlenu odčítali modrou část a tím získávali další červené členy na další dělení.

Ještě jeden postřeh: nemůžeme čekat, že pokaždé příklad na dělení vyjde tak hezky. Při dělení mnohočlenu $\left(a^3+5a^2+9a+9+1\right):\left(a+3\right)$ bychom nedokázali přidanou jedničku rozdělit dvojčlenem $\left(a+3\right)$ a zůstala by nám jako zbytek.

Př. 4: Níže je spočten podíl 7305:3. Čím se tento zápis liší od normálního? Jaký je význam této odlišnosti? Zachycuje tento zápis přesně to, co se v jednotlivých krocích děje?

$$
\begin{array}{l}
\ \ 7305:3=2435 \\
-6 \\
\ \ 13 \\
-12 \\
\ \ \ \ 10 \\
\ \ \ -9 \\
\ \ \ \ \ 15 \\
\ \ \ -15 \\
\ \ \ \ \ \ 0
\end{array}
$$

Příklad se liší tím, že uvádíme v zápisu číslo, které odečítáme z původního čísla. Zápis není úplně přesný, protože:

- v prvním kroku neodečítáme od čísla 7 číslo 6, ale od čísla 7305 číslo 6000,
- výsledkem odečítání (číslem, které ještě musíme vydělit) není číslo 13, ale číslo 1305.

Zcela podrobný zápis by měl vypadat takto:

$$
\begin{array}{r}
7305:3=2435 \\
-6000 \\
1305 \\
-1200 \\
105 \\
-90 \\
15 \\
-15 \\
0
\end{array}
$$

Zápis by sice lépe zachycoval, co se ve skutečnosti děje, ale obsahuje zbytečně mnoho nul a opakování číslic z konce čísla 7305.

Princip dělení pod sebe se dá znázornit na rozdělování peněz. Rozdělujeme 7305 třem lidem (příklad $7305:3$).

- Na začátku máme: 7 x tisícikoruna, 3 x stokoruna, 5 korun. Rozdělovat budeme od bankovek nejvyšší hodnoty.
- Rozdělíme tisícikoruny $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme dvě, jedna zbude. Zbylou tisícikorunu rozměníme na stokoruny.
- Rozdělíme stokoruny, máme třináct stokorun (deset rozměněných, tři původní) $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme čtyři stokoruny, jedna zbude. Rozměníme zbylou stokorunu na desetikoruny.
- Rozdělíme desetikoruny, máme deset desetikorun (rozměněných, v původní hromádce žádná nebyla) $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme tři desetikoruny, jedna zbude. Rozměníme zbylou desetikorunu na koruny.
- Rozdělíme koruny, máme patnáct korun (deset rozměněných, pět původních) $\Rightarrow$ na každou hromádku položíme pět korun, nic nezbylo.

Př. 5: Zkus analogicky s podílem $7305:3$ vypočítat podíl $\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)$.

Pedagogická poznámka: Předchozí příklad zatím (3 třídy) nikdo nevyřešil. Na promítnutí řešení (následující příklad) již někteří jednotlivci reagují. Nechávám ho tam chvíli, a ze zbytkem třídy pak provedeme vysvětlování uvedené pod příkladem.

Př. 6: Níže je srovnán postup pro dělení podílů $7503:3$ a $\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)$.

$$\begin{array}{l} 7305:3=2435 \\ -6 \\ \ \ 13 \\ -12 \\ \ \ \ 10 \\ \ \ -9 \\ \ \ \ \ 15 \\ \ \ -15 \\ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=a^2+2a+3 \\ -\left(a^3+3a^2\right) \\ \qquad 2a^2+9a+9 \\ \quad -\left(2a^2+6a\right) \\ \qquad\qquad 3a+9 \\ \qquad\quad -\left(3a+9\right) \\ \qquad\qquad\quad 0 \end{array}$$

a) Odvoď ze zápisu algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.
b) Vysvětli, proč je prvním členem v podílu člen a^2.
c) Vysvětli, proč v prvním kroku odečítáme od původního mnohočlenu mnohočlen a^3+3a^2.
d) Vysvětli, proč v druhém kroku dělíme mnohočlen $2a^2+9a+9$.
e) Podobným způsobem zdůvodni všechny ostatní kroky.

a) Odvoď ze zápisu algoritmus pro dělení mnohočlenu mnohočlenem.
Uvedeno pod řešením příkladu.

b) Vysvětli, proč je prvním členem v podílu člen a^2.
Dělíme člen s největší mocninou v dělenci (a^3) členem s největší mocninou v děliteli (a).

c) Vysvětli, proč v prvním kroku odečítáme od původního mnohočlenu mnohočlen a^3+3a^2.
Podobně jako jsme zpětným násobením $2\cdot 3$ získali číslo 6, získáme zpětným násobením $a^2\left(a+3\right)=a^3+3a^2$ mnohočlen, který pak odečteme od původního mnohočlenu.

d) Vysvětli, proč v druhém kroku dělíme mnohočlen $2a^2+9a+9$.
Část původního mnohočlenu jsme rozdělili v prvním kroku, po odečtení jsme získali mnohočlen $2a^2+9a+9$ představující dosud nerozdělený zbytek, který ještě musíme rozdělit v dalších krocích.

e) Podobným způsobem zdůvodni všechny ostatní kroky.

Algoritmus dělení mnohočlenu mnohočlenem je velmi podobný algoritmu písemného dělení dvou čísel. Opakují se neustále tři kroky:

- vydělení,
- zpětné vynásobení,
- odečtení a tím určení zbytku.

Tyto tři kroky se neustále opakují, dokud je co rozdělovat.

Algoritmus děleni mnohočlenu mnohočlenem.

1. Seřadíme oba mnohočleny od členů s nejvyšší mocninou.

$\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=$

2. Vydělíme první člen dělence prvním členem dělitele a výsledek napíšeme jako první člen podílu.

$\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=a^2$

3. Zpětně vynásobíme získaný člen podílu s dělitelem a výsledek napíšeme pod dělenec.

$\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=a^2$

a^3+3a^2

4. Odečteme výsledek zpětného násobení od dělence a výsledek zapíšeme.

$\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=a^2$

$-\left(a^3+3a^2\right)$

$2a^2+9a+9$

5. Na mnohočlen získaný odečtením uplatňujeme kroky 2 – 4, dokud nám jako výsledky dělení vychází jednočleny.

$\left(a^3+5a^2+9a+9\right):\left(a+3\right)=a^2+2a+3$

$-\left(a^3+3a^2\right)$

$2a^2+9a+9$

$-\left(2a^2+6a\right)$

$3a+9$

$-\left(3a+9\right)$

0

Př. 7: Vyděl.

a) $\left(2a^2+a-6\right):\left(a+2\right)$ b) $\left(6x^2-x-2\right):\left(2x+1\right)$

c) $\left(2y^2-5y+6\right):\left(2y-3\right)$ d) $\left(6x^3-7x^2-19x-7\right):\left(2x+1\right)$

a)

$\left(2a^2+a-6\right):\left(a+2\right)=2a-3$

$-\left(2a^2+4a\right)$

$-3a-6$

$-\left(-3a-6\right)$

0

b)

$\left(6x^2-x-2\right):\left(2x+1\right)=3x-2$

$-\left(6x^2+3x\right)$

$-4x-2$

$-\left(-4x-2\right)$

0

c)

$$
\begin{array}{l}
\left(2y^2-5y+6\right):\left(2y-3\right)=y-2\\
-\left(2y^2-3y\right)\\
\qquad -2y+6\\
\qquad -\left(-2y+6\right)\\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

d)

$$
\begin{array}{l}
\left(6x^3-7x^2-19x-7\right):\left(2x+1\right)=3x^2-5x-7\\
-\left(6x^3+3x^2\right)\\
\qquad -10x^2-19x-7\\
\qquad -\left(-10x^2-5x\right)\\
\qquad\qquad -14x-7\\
\qquad\qquad -\left(-14x-7\right)\\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Shrnutí: Mnohočlen dělíme mnohočlenem postupem, který vychází z písemného dělení.